# Examen del 8 de mayo de 2018

## Cálculo vectorial.

Los momentos generados por un sistema de vectores deslizantes en los puntos $A(,0,0,0)$, $B(1,2,1)$ y $C(3,4,0)$ son $\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{i} + 3\cdot\boldsymbol{j} + 5\cdot\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M_B} = 2\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j} + a\cdot\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{M_C} = b\cdot\boldsymbol{i} + 9\cdot\boldsymbol{j} + c\cdot\boldsymbol{k}$, respectivamente. Determinar

1. Los valores de $a$, $b$ y $c$.
   Los momentos generados por un sistema de vectores deslizantes en los puntos $A(,0,0,0)$, $B(1,2,1)$ y $C(3,4,0)$ han de verificar que

$$\boldsymbol{M_A}\cdot\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{M_B}\cdot\boldsymbol{AB}$$
$$\boldsymbol{M_A}\cdot\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{M_C}\cdot\boldsymbol{AC}$$
$$\boldsymbol{M_B}\cdot\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{M_C}\cdot\boldsymbol{BC}$$

   es decir,

$$(\boldsymbol{i} + 3\cdot\boldsymbol{j} + 5\cdot\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i} + 2\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = (2\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j} + a\cdot\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i} + 2\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$
$$(\boldsymbol{i} + 3\cdot\boldsymbol{j} + 5\cdot\boldsymbol{k})\cdot(3\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j}) = (b\cdot\boldsymbol{i} + 9\cdot\boldsymbol{j} + c\cdot\boldsymbol{k})\cdot(3\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j})$$
$$(2\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j} + a\cdot\boldsymbol{k})\cdot(2\cdot\boldsymbol{i} + 2\cdot\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = (b\cdot\boldsymbol{i} + 9\cdot\boldsymbol{j} + c\cdot\boldsymbol{k})\cdot(2\cdot\boldsymbol{i} + 2\cdot\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$$

   de donde resulta que

$$\boldsymbol{M_B} = 2\cdot\boldsymbol{i} + 4\cdot\boldsymbol{j} + 2\cdot\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{M_C} = -7\cdot\boldsymbol{i} + 9\cdot\boldsymbol{j} - 6\cdot\boldsymbol{k}$$

2. La resultante general del sistema.
   Teniendo en cuenta las ecuaciones del campo de momentos.

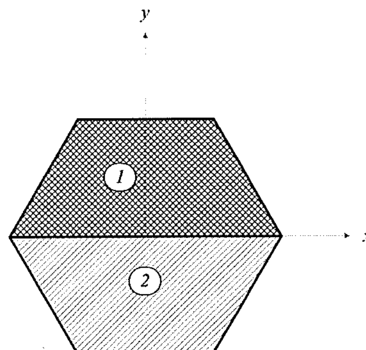
$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_B} + \boldsymbol{AB}\wedge\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{M_C} + \boldsymbol{BC}\wedge\boldsymbol{R}$$

   se obtiene que

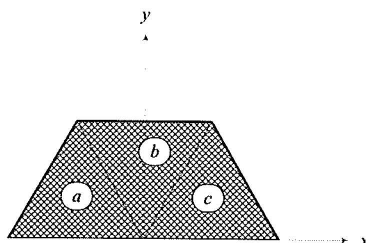
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i} + 5\cdot\boldsymbol{j} + 2\cdot\boldsymbol{k}$$

## Geometría de Masas.

Un hexágono regular de lado $a$ está formado por dos placas de distinto material y de forma indicada en la figura. Determinar la relación entre las densidades superficiales $\rho_1$ y $\rho_2$ para que la posición del centro de gravedad del conjunto esté en $(0, a\cdot\sqrt{3}/6)$.



Por simetría el cdg de cada una de las dos placas estará sobre el eje $y$ y a la misma distancia del origen. Se va a estudiar el centro de masas de la placa superior




Se puede dividir en tres triángulos equiláteros de lado $a$, como se muestra en la figura. La coordenada $y$ de los centros de gravedad de los triángulos es

$$y_a = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$
$$y_b = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$
$$y_c = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

Por consiguiente, en la placa 1

$$y_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

de igual manera, en la placa 2

$$y_2 = -\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

Por consiguiente

$$(\rho_1 + \rho_2) \cdot y_G = \rho_1 \cdot y_1 + \rho_2 \cdot y_2$$

es decir,

$$(\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \rho_1 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9} - \rho_2 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{9}$$

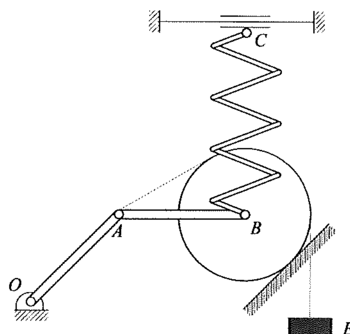
de donde resulta que

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{7}$$

## Estática.

El sistema de la figura está en un plano vertical y consta de dos barras de longitud $L$ y peso $P = M \cdot g$ cada una de ellas; un disco de radio $L/2$ y peso $P = M \cdot g$, un resorte que une una guía horizontal con el centro del disco; una cuerda, atada a la articulación $A$, que está manteniendo un peso $E$ de valor $Q = 2 \cdot M \cdot g$, apoyándose en el perímetro del disco. No hay rozamiento.

www.tecnun.es

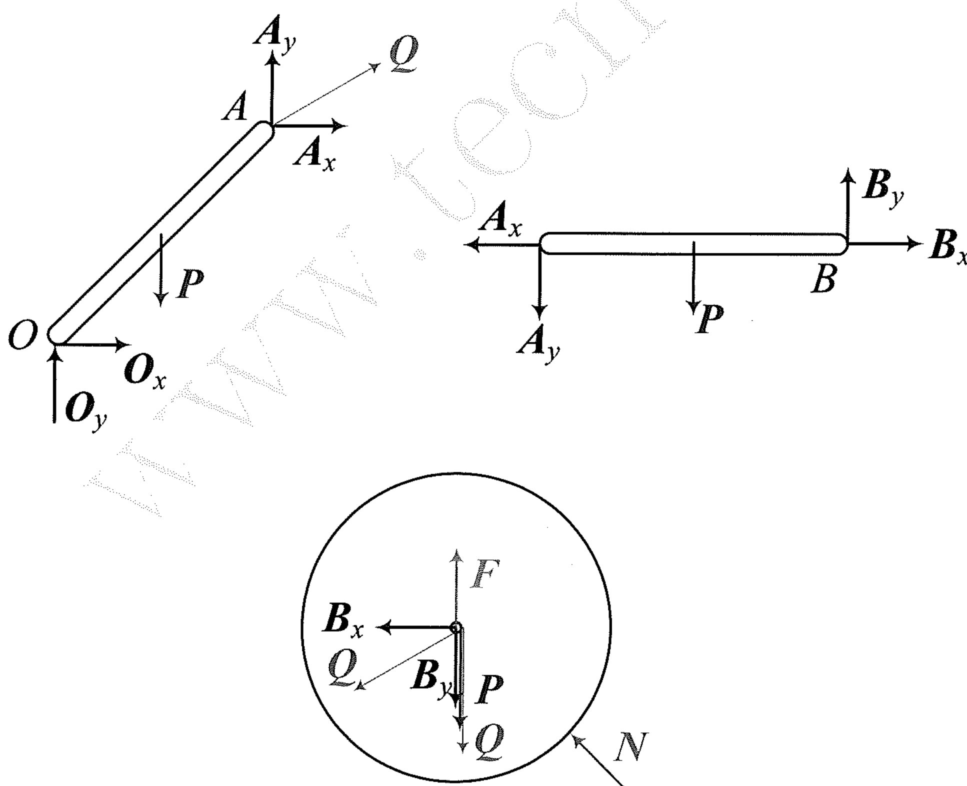



1. Explicar el motivo por el que el resorte $BC$ en el equilibrio ha de estar siempre en posición vertical.

   Como la fuerza que ejerce la guía sobre el extremo $C$ del resorte ha de ser vertical y el resorte está en equilibrio, la fuerza en el extremo $B$ ha de ser también vertical, ya que es un sistema en equilibrio sometido exclusivamente a dos fuerzas: ambas han de ser iguales, opuestas y colineales.

2. Si en el equilibrio la barra $OA$ forma un ángulo de $\pi/4$ con la horizontal, la barra $AB$ está horizontal y el suelo en el que se apoya el disco forma $\pi/4$ con la horizontal, se desea obtener la tensión del resorte.

   Aislando los tres sólidos




www.tecnun.es

- Barra $OA$

$$O_x + A_x + Q \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$
$$O_y + A_y - P + Q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$
$$-\frac{L \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot P + \frac{L \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left(A_y + Q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{L \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \left(A_x + Q \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0$$

- Barra $AB$

$$-A_x + B_x = 0$$
$$-A_y + B_y - P = 0$$
$$-\frac{L}{2} \cdot P + L \cdot B_y = 0$$

- Polea

$$-B_x - Q \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - N \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$F - B_y + N \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) B_y - P - Q - Q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Convenientemente resuelto, conduce a que la fuerza del resorte es

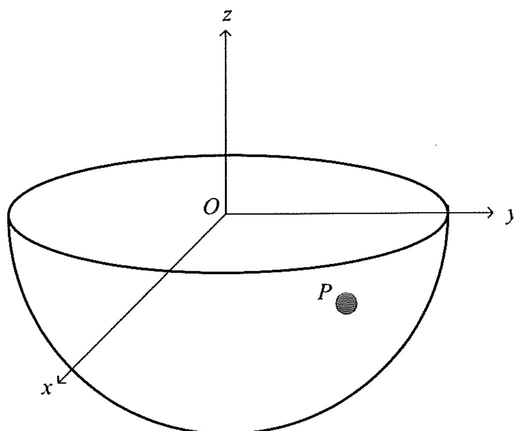
$$F = \frac{9 \cdot M \cdot g}{2}$$

## Cinemática y Dinámica.

Un punto material de masa unidad se encuentra vinculado a una semiesfera lisa de radio unidad, de modo que su plano ecuatorial está horizontal

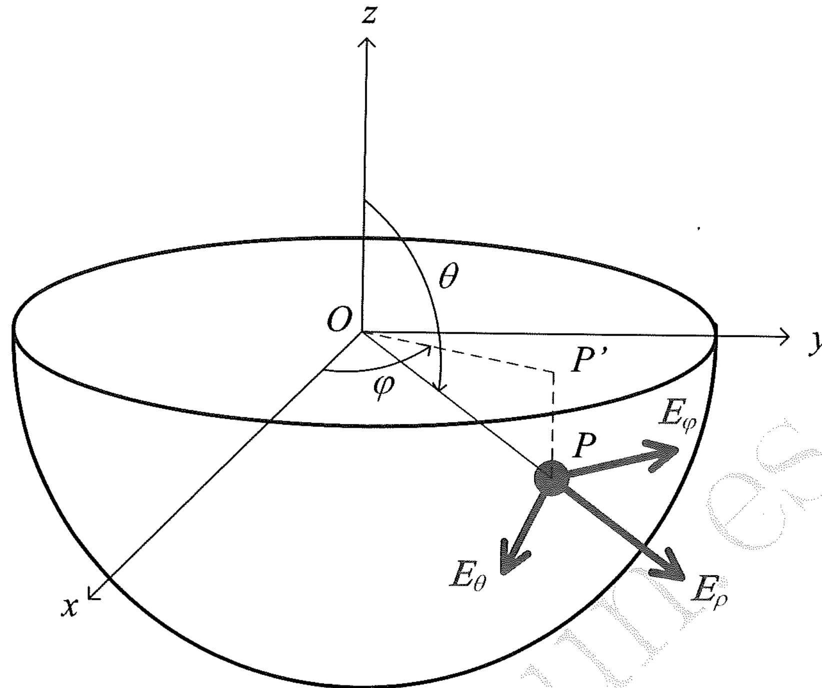
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

siendo $z \leq 0$. Está sometido a la acción de su propio peso. Se observa durante el movimiento que la altura máxima a la que llega por debajo del plano ecuatorial es $1/\sqrt{2}$ y que en esta situación el módulo de su velocidad es $1/\sqrt{2}$. Determinar para esa posición la aceleración de la partícula y el valor de la fuerza de enlace.




Se va a resolver el ejercicio por pasos

www.tecnun.es




1. Cinemática. Se va a resolver en coordenadas esféricas.

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{E}_\rho$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{\theta} \cdot \boldsymbol{E}_\theta + \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a} = \left(-\dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\theta) - \dot{\theta}^2\right) \cdot \boldsymbol{E}_\rho + \left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)\right) \cdot \boldsymbol{E}_\theta + \left(\ddot{\varphi} \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)\right) \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$d\boldsymbol{OP} = d\theta \cdot \boldsymbol{E}_\theta + d\varphi \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

2. Fuerzas.

- Aplicada.

$$\boldsymbol{F}_{ap} = -g \cdot \cos(\theta) \cdot \boldsymbol{E}_\rho + g \cdot \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{E}_\theta$$

que deriva de un potencial. Tomando como potencial nulo el plano ecuatorial, se tiene que

$$V = g \cdot \cos(\theta)$$

- De enlace.

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_\rho \cdot \boldsymbol{E}_\rho + F_\theta \cdot \boldsymbol{E}_\theta + F_\varphi \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

Como la superficie es lisa, es decir no hay rozamiento, se cumplirá que el trabajo realizado por la fuerza de enlace al desplazar de modo arbitrario la partícula sobre la superficie esférica ha de ser nulo. Es decir,

$$\boldsymbol{F}_{en} \cdot d\boldsymbol{OP} = 0$$
$$F_\theta \cdot d\theta + F_\varphi \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi = 0$$

de donde se concluye que $F_\theta = 0$ y $F_\varphi = 0$. Por tanto,

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_\rho \cdot \boldsymbol{E}_\rho$$

www.tecnun.es

3. Ecuaciones de la Dinámica

- Segunda ley de Newton.

$$\boldsymbol{F}_{act} = M \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

Por consiguiente, en componentes, se llega a

$$\begin{aligned} &- g \cdot \cos(\theta) + F_\rho = -\dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\theta) - \dot{\theta}^2 \\ &g \cdot \sin(\theta) = \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &0 = \ddot{\varphi} \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$- g \cdot \cos(\theta) + F_\rho = -\dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\theta) - \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$g \cdot \sin(\theta) = \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad (2)$$

$$A = \dot{\varphi} \cdot \sin^2(\theta) \quad (3)$$

siendo $A$ una constante a determinar si se precisa.

- Energía.
Como la fuerza aplicada deriva de un potencial y no hay rozamiento, se cumplirá que $E = T + V$, es decir, la energía mecánica se conserva.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin^2(\theta) \cdot \dot{\varphi}^2 + g \cdot \cos(\theta) \quad (4)$$

Llegados a este punto ya se puede estudiar el problema planteado. Si el punto no sube más de la altura marcada en el enunciado, se está indicando que el ángulo mínimo al que llega $\theta$ es $3 \cdot \pi/4$, que es la posición solicitada. En esa posición, la partícula no puede subir más. Ello significa que la componente según $\boldsymbol{E}_\theta$ de la velocidad ha de ser cero. Recordando la expresión de la velocidad y particularizada para ese valor del ángulo $\theta = 3 \cdot \pi/4$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\theta} \cdot \boldsymbol{E}_\theta + \dot{\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

es decir $\dot{\theta} = 0$ y, por consiguiente, $\dot{\varphi} = 1$. Estudiando las ecuaciones (??) y (??)

$$\begin{aligned} &g \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + F_\rho = -\frac{1}{2} \\ &g \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \\ &0 = \ddot{\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

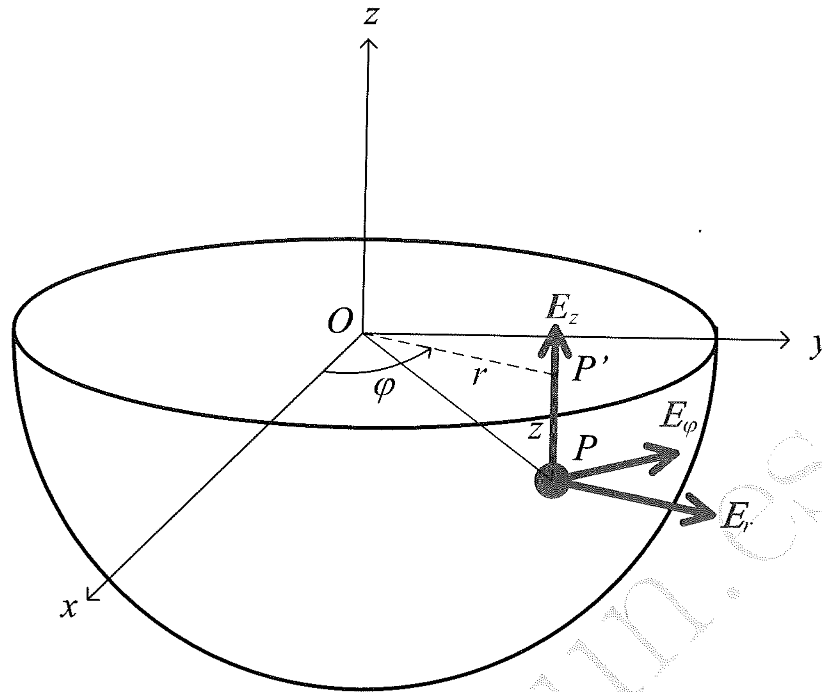
es decir,

$$\begin{aligned} &F_\rho = -\frac{1}{2} - g \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\ddot{\theta} = g \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &\ddot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_{en} = \left(-\frac{1}{2} - g \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \boldsymbol{E}_\rho \\ &\boldsymbol{a} = -\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{E}_\rho + g \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \boldsymbol{E}_\theta \end{aligned}$$

www.tecnun.es




www.tecnun.es

1. Cinemática. Se va a resolver en coordenadas cilíndricas, con origen en el centro de la superficie esférica.

$$\boldsymbol{OP} = r \cdot \boldsymbol{E}_r - \sqrt{1-r^2} \cdot \boldsymbol{E}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r} \cdot \boldsymbol{E}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi + \frac{r \cdot \dot{r}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \boldsymbol{E}_z$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2\right) \cdot \boldsymbol{E}_r + \left(r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r}\dot{\varphi}\right) \cdot \boldsymbol{E}_\varphi + \left(\frac{\dot{r}^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r \cdot \ddot{r}}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r^2 \cdot \dot{r}^2}{\sqrt{(1-r^2)^3}}\right) \cdot \boldsymbol{E}_z$$

$$d\boldsymbol{OP} = dr \cdot \boldsymbol{E}_r + r \cdot d\varphi \cdot \boldsymbol{E}_\varphi + \frac{r \cdot dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \boldsymbol{E}_z$$

2. Fuerzas.

- Aplicada.

$$\boldsymbol{F}_{ap} = -g \cdot \boldsymbol{E}_z$$

que deriva de un potencial. Tomando como potencial nulo el plano ecuatorial, se tiene que

$$V = -g \cdot \sqrt{1-r^2}$$

- De enlace.

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_r \cdot \boldsymbol{E}_r + F_\varphi \cdot \boldsymbol{E}_\varphi + F_z \cdot \boldsymbol{E}_z$$

Como la superficie es lisa, es decir no hay rozamiento, se cumplirá que el trabajo realizado por la fuerza de enlace al desplazar de modo arbitrario la partícula sobre la superficie esférica ha de ser nulo. Es decir,

$$\boldsymbol{F}_{en} \cdot d\boldsymbol{OP} = 0$$

$$F_r \cdot dr + F_\varphi \cdot r \cdot d\varphi + F_z \cdot \frac{r \cdot dr}{\sqrt{1-r^2}} = 0$$

© 2018 Tecnun (University of Navarra)

de donde se concluye que $F_\varphi = 0$ y $F_r = -F_z \cdot \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$. Por tanto,

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_z \cdot \left( -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \boldsymbol{E}_r + \boldsymbol{E}_z \right)$$

3. Ecuaciones de la Dinámica

- Segunda ley de Newton.

$$\boldsymbol{F}_{act} = M \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

Por consiguiente, en componentes, se llega a

$$-F_z \cdot \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad (5)$$

$$0 = r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \qquad (6)$$

$$-g + F_z = \frac{\dot{r}^2}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r \cdot \ddot{r}}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r^2 \cdot \dot{r}^2}{\sqrt{(1-r^2)^3}} \qquad (7)$$

- Energía.
Como la fuerza aplicada deriva de un potencial y no hay rozamiento, se cumplirá que $E = T + V$, es decir, la energía mecánica se conserva.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left( \dot{r}^2 + \frac{r^2 \cdot \dot{r}^2}{1-r^2} + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \right) - g \cdot \sqrt{1-r^2} \qquad (8)$$

Llegados a este punto ya se puede estudiar el problema planteado. Si el punto no sube más de la altura marcada en el enunciado, se está indicando que la altura máxima a la que llega, en la que $r$ es $1/sqrt2$, que es la posición solicitada. En esa posición, la partícula no puede subir más. Ello significa que la componente según $\boldsymbol{E}_z$ de la velocidad ha de ser cero. Recordando la expresión de la velocidad y particularizada para ese valor de $r$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r} \cdot \boldsymbol{E}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi + \frac{r \cdot \dot{r}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \boldsymbol{E}_z$$

es decir $\dot{r} = 0$ y, por consiguiente, $\dot{\varphi} = 1$. Estudiando las ecuaciones (??), (??) y (??)

$$-F_z = \ddot{r} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ddot{\varphi}$$

$$-g + F_z = \ddot{r}$$

es decir,

$$F_z = \frac{g}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\ddot{r} = -\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\ddot{\varphi} = 0$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{F}_{en} = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{g}{2} \right) \cdot (-\boldsymbol{E}_r + \boldsymbol{E}_z)$$

$$\boldsymbol{a} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{g}{2} \right) \cdot \boldsymbol{E}_r + \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{g}{2} \right) \boldsymbol{E}_z$$



© 2018 Tecnun (University of Navarra)

www.tecnun.es

## Teoría.

1. Considere un sólido plano, ¿cuánto vale el momento estático de este sólido plano respecto a su centro de masas?

   Mire sus notas de teoría.

2. Considere un sólido plano y las dos partes en las que una recta, situada en el plano, que pasa por el centro de masas, divide al sólido, ¿qué relación cumplen entre sí los momentos estáticos de cada una de las partes respecto al centro de masas del sólido?

   Como el momento estático del sólido completo respecto al centro de masas es nulo, los momentos estáticos han de ser dos vectores iguales en módulo, con la misma dirección y sentidos opuestos.

3. Si un sólido plano se dividiera en dos partes por una recta coplanaria con él, que no pasara por el centro de masas, ¿qué relación guardarían entre sí los momentos estáticos de cada una de las partes en que queda dividido el sólido respecto al centro de masas del sólido?

   El momento estático del sólido completo respecto de su centro de masas es nulo. Por ello, la suma de los momentos estáticos de ambas partes respecto al centro de masas del sólido ha de ser nula. Por tanto, los momentos estáticos de ambas partes respecto al centro de gravedad son vectores iguales en módulo, dirección y sentidos opuestos.

4. Defina los conceptos de enlace mecánico y de fuerza de enlace.

   Mire sus notas de teoría.

5. Si un punto material describe la parábola $y = x^2$, en la posición $(0, 0)$ ¿puede ser su aceleración $5 \cdot \boldsymbol{i} - 5 \cdot \boldsymbol{j}$? Justifique su respuesta.

   En la posición (0,0) el vector $\boldsymbol{E}_n$ coincide con el vector $\boldsymbol{j}$. Por tanto, la componente normal de la aceleración ha de ser $v^2/\rho \cdot \boldsymbol{j}$, es decir, positiva y en este caso no lo es. Efectivamente, la aceleración no puede ser como se define en el enunciado.

   También se puede demostrar del siguiente modo

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{OP} &= x \cdot \boldsymbol{i} + x^2 \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} &= \dot{x} \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a} &= \ddot{x} \cdot \boldsymbol{i} + (2 \cdot \dot{x}^2 + 2 \cdot x \cdot \ddot{x}) \cdot \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

   Con los datos que se dan

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{OP} &= 0 \cdot \boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} &= \dot{x} \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot 0 \cdot \dot{x} \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a} &= \ddot{x} \cdot \boldsymbol{i} + (2 \cdot \dot{x}^2 + 2 \cdot 0 \cdot \ddot{x}) \cdot \boldsymbol{j} = 5 \cdot \boldsymbol{i} - 5 \cdot \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

   Por consiguiente, $2 \cdot \dot{x}^2 = -5$, que es imposible.

6. Si se conoce el vector velocidad y el vector aceleración de una partícula en un instante, ¿es posible determinar el radio de curvatura de torsión de la trayectoria en ese instante? Justifique la respuesta.

   No se puede determinar el radio de curvatura de torsión de la trayectoria en esa posición, ya que para ello es necesario obtener la derivada respecto de $s$ del vector $\boldsymbol{E}_b$. Dicha derivada no está presente en la definición de la velocidad ni en la de aceleración. Es decir, se sabe que

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v \cdot \boldsymbol{E}_t \\ \boldsymbol{a} &= \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{E}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \boldsymbol{E}_n \end{aligned}$$

www.tecnun.es

y combinando ambas se obtiene que

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a} = \frac{v^3}{\rho} \cdot \boldsymbol{E}_b$$

Derivando respecto del tiempo, se obtiene

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{E}_b - \frac{v^4}{\rho} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \boldsymbol{E}_n$$

es decir,

$$\left(\boldsymbol{v} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{E}_n = -\frac{v^4}{\rho} \cdot \frac{1}{\tau}$$

o lo que es lo mismo

$$\tau = -\frac{v^4}{\rho} \cdot \frac{1}{\left(\boldsymbol{v} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{E}_n}$$

De donde se demuestra que es necesario conocer la sobreaceleración $(d\boldsymbol{a}/dt)$ para obtener el radio de curvatura de torsión de la trayectoria.

7. Un punto material se mueve sometido a la acción de una fuerza central, demuestre que su trayectoria es siempre una curva plana.

   Mire sus notas teoría.

www.tecnun.es